

PHẦN ĐẠI SỐ

BÀI 5: DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức dạng $ax^2 + bx + c$. Trong đó a, b, c là những số cho trước với $a \neq 0$.

Nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ được gọi là **nghiệm của tam thức bậc hai** $f(x) = ax^2 + bx + c$; $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = b'^2 - ac$ theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

2. Dấu của tam thức bậc hai

Dấu của tam thức bậc hai được thể hiện trong bảng sau:

$f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$	
$\Delta < 0$	$f(x)$ cùng dấu với $a, \forall x \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	$f(x)$ cùng dấu với $a, \forall x \neq -\frac{b}{2a}$
$\Delta > 0$	$f(x)$ cùng dấu với $a, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
	$f(x)$ trái dấu với $a, \forall x \in (x_1; x_2)$

Nhận xét: Cho tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

- $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Xét dấu các tam thức sau

a) $3x^2 - 2x + 1$

b) $-x^2 + 4x + 5$

c) $-4x^2 + 12x - 9$

d) $3x^2 - 2x - 8$

e) $25x^2 + 10x + 1$

f) $-2x^2 + 6x - 5$

Bài 2: Xét dấu các biểu thức sau:

$$\text{a) } f(x) = (x^2 - 5x + 4)(2 - 5x + 2x^2) \quad \text{b) } \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

Bài 3: Xét dấu các biểu thức sau:

$$\text{a) } f(x) = \frac{(3x-1)(x^2-2x-4)}{x^2-4} \quad \text{b) } g(x) = \frac{(3x^2-2x-5)(x+4)}{3x-x^2}$$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau:

$$\text{a) } x^2 - 7x + 10 < 0$$

$$\text{b) } x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$\text{c) } 2 - x - x^2 < 0$$

$$\text{d) } (x^2 + x - 6)(2x - 1) > 0$$

$$\text{e) } (1 - x^2)(x^2 - 5x + 6) < 0$$

$$\text{f) } (2x - 7)(3x^2 - 5x + 2) \geq 0$$

$$\text{g) } (x^2 - 6x - 7)^2 > 9(x^2 - 4x + 3)^2 \quad \text{h) } (x - 5)(4 - x^2)(x^2 - 5x + 6) \leq 0$$

$$\text{i) } (4 - 5x + x^2)(7 + 3x)(6 + x - x^2) \geq 0$$

$$\text{j) } (6 - 2x)(4 - 4x + x^2)(x^2 - 7x + 10)(-6 - x + x^2) \geq 0$$

$$\text{k) } (3 + 2x)(x^2 - 9x + 20)(8 + 2x - x^2) \leq 0$$

$$\text{l) } (8 + 4x)(x^2 - 3x + 1)(15 - 2x - x^2) \geq 0$$

$$\text{m) } (7 + 3x)(x^3 + 3x^2 - 10x - 24)(5 - 4x - x^2) \geq 0$$

$$\text{n) } (-2 + x)(6 - 4x - 2x^2)(30 - 19x + x^3) \leq 0$$

$$\text{o) } (x^3 - x^2 + x + 3)(5 - x)(12 - 4x - x^2) \geq 0$$

$$\text{p) } (5 + 4x)(x^2 - 6x + 9)(21x - 12x^2 + 2x^3 - 20)(-16 + 8x - x^2) \geq 0$$

$$\text{q) } (-3x^2 - 9x + x^3 - 5)(24 - 10x + x^2)(4 - x) \leq 0$$

$$\text{r) } (5 + x)(3 - 4x + x^2)(11x^2 - 39x + 45 - x^3) \leq 0$$

$$\text{s) } (x^3 + 3x^2 + x - 1)(3 + x)(6 - 5x + x^2) \geq 0$$

Bài 5: Giải các bất phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 5x + 4} > 0$$

$$\text{b) } \frac{x^2 + x + 3}{1 - 2x} < 0$$

$$\text{c) } \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \geq 0$$

$$\text{d) } \frac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0$$

$$\text{e) } \frac{(x^2 - 3x)(2 - x)}{(x^2 + x - 6)} \geq 0$$

$$\text{f) } \frac{x^3 + x - x^2 - 1}{x + 8} \leq 0$$

$$\text{g) } \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x(2 - x)} < 0$$

$$\text{h) } \frac{4x + 1}{4(2 - x)} \leq x + 2$$

$$\text{i) } \frac{4 - x}{x - 5} \geq \frac{1}{1 - x}$$

$$\text{j) } 3(1 - x) > \frac{7 - 8x}{1 + x}$$

$$\text{k) } \frac{x^2 - 4x + 3}{3 - 2x} < 1 - x$$

$$\text{l) } \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} \geq \frac{1}{1 - x}$$

$$\text{m) } \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2} < \frac{3}{x - 3}$$

$$\text{n) } \frac{x - 2}{x - 1} - \frac{x - 3}{x + 1} < \frac{x^2 + 4x + 15}{1 - x^2}$$

$$\text{o) } \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x^2 - x + 1} \leq \frac{2x + 3}{x^3 + 1}$$

$$\text{p) } x(x - 1) < \frac{42}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{q) } \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x - 30} > 0$$

$$\text{r) } \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^2 - 8x + 15} \geq 0$$

$$\text{s) } x^2 + (x + 1)^2 \leq \frac{15}{x^2 + x + 1}$$

Bài 6: Giải các hệ bất phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x^2 - 12x + 18 > 0 \\ 3x^2 - 20x - 7 < 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (x^2 - 8x)^2 < (x + 20)^2 \\ (x^2 - 16x + 21) > 36x^2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} (2x - 1)(x^2 - 9) \geq 0 \\ x^2 - x \leq 20 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 6x^2 + 5x - 56 < 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{8 - x} > \frac{1}{x + 1} \end{cases}$$

$$\text{e) } \frac{1}{13} \leq \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 5x + 7} \leq 1$$

$$\text{f) } -4 \leq \frac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \leq 1$$

$$\text{g) } \begin{cases} x^3 - 11x^2 + 10x \geq 0 \\ x^3 - 12x^2 + 32x \leq 0 \end{cases}$$

Bài 7: Tìm m để:

$$\text{a) } (m-2)x^2 + 2(m-2)x + 5m + 7 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - 5m - 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } m(m+2)x^2 + 2mx + 3 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{d) } mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài 8: Định m để các hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } y = \sqrt{(m^2 - 1)x^2 + 2(m+1)x + 5}$$

$$\text{b) } y = \frac{2x - 3}{\sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3}}$$

$$\text{c) } y = 3x + 5 - \sqrt{x^2 - 2mx + 2 - m}$$

$$\text{d) } y = \sqrt{\frac{(m-1)x^2 + 3(m-1)x + m}{x^2 - 2x + 7}}$$

$$\text{e) } y = \sqrt{\frac{-x^2 + 3x - 10}{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 2 - 2m}}$$

Bài 9: Định m để các bất phương trình sau vô nghiệm:

$$\text{a) } mx^2 - 2(2m+1)x + 3m + 4 \geq 0 \quad \text{b) } (m^2 + 2m - 3)x^2 + 2(m-1)x + 1 < 0$$

$$\text{c) } (m-1)x^2 - (m-5)x + m - 1 \leq 0 \quad \text{d) } (2m+1)x^2 - (m-1)x + m > 0$$

PHẦN HÌNH HỌC

BÀI TẬP ÔN TẬP HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Bài 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$.

Tính cạnh BC , và độ dài đường cao kẻ từ A .

Bài 2: Cho $\triangle ABC$ có $b = 7\text{cm}$, $c = 5\text{cm}$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính h_a và R .

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ có $a = 7\text{cm}$, $b = 8\text{cm}$, $c = 6\text{cm}$. Tính h_a , m_a .

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A , $B = 58^\circ$ và cạnh a bằng 72cm . Tính góc C , cạnh b , cạnh c và độ dài đường cao h_a .

Bài 5: Cho tam giác ABC biết cạnh a , b , c lần lượt là 52.1cm , 85cm , 54cm . Tính các góc A , B , C .

Bài 6: Cho tam giác ABC có $A = 120^\circ$, cạnh $b = 8\text{cm}$, cạnh $c = 5\text{cm}$. Tính cạnh a , góc B và diện tích tam giác.

Bài 7: Cho tam giác ABC có $a = 8$, $b = 10$, $c = 13$. Tính độ dài đường trung tuyến AM và cho biết tam giác ABC có phải tam giác tù hay không?

Bài 8: Cho tam giác ABC biết cạnh $a = 137,5\text{cm}$, $B = 83^\circ$, $C = 57^\circ$. Tính góc A , bán kính đường tròn ngoại tiếp, cạnh b và c của tam giác.

Bài 9: Tính góc lớn nhất của tam giác ABC biết:

a. $a = 3\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$, $c = 6\text{cm}$.

b. $a = 40\text{cm}$, $b = 13\text{cm}$, $c = 37\text{cm}$.

Bài 10: Tìm h_a , R , r và S của $\triangle ABC$ biết :

a) $\hat{A} = 60^\circ$, $b = 8\text{cm}$, $c = 5\text{cm}$.

b) $a = 21\text{cm}$, $b = 17\text{cm}$, $c = 10\text{cm}$.

c) $a = 4\sqrt{7}\text{cm}$, $b = 6\text{cm}$, $c = 8\text{cm}$.

Bài 11: Tính các góc A , B và h_a , R , r và S của $\triangle ABC$ biết :

a) $a = \sqrt{6}\text{cm}$, $b = 2\text{cm}$, $c = (\sqrt{3} + 1)\text{cm}$.

b) $a = 2\sqrt{3}\text{cm}$, $b = 2\sqrt{2}\text{cm}$, $c = (\sqrt{6} - \sqrt{2})\text{cm}$.

Bài 12: Cho $\triangle ABC$. Tính độ dài AC biết:

a) $B = 120^\circ$, $AB = 6$, $BC = 10$.

b) $\hat{A} = 60^\circ$, $AB = 8$, $BC = 13$.

c) $C = 60^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = \sqrt{2}$.

Bài 13: Cho $\triangle ABC$ biết $\hat{A} = 120^\circ$, $BC = 13$, $AB + AC = 15$. Tính AB và AC .

Bài 14: Cho $\triangle ABC$ biết $a = 4\sqrt{7}$, $b = 6$, $c = 8$. Tính:

a) S , h_a , h_b , h_c .

b) R , r .

c) m_a , m_b , m_c .

Bài 15: Cho $\triangle ABC$ cân ($AB = AC = 5a$, $BC = 6a$), M là trung điểm BC , N trên đoạn AB sao cho $AN = a$.

a) Tính MN .

b) Tính R của tam giác AMN .

Bài 16: Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 60^\circ$, $AC = b$, $AB = c$, phân giác trong $AD = k$. Tính k theo b và c .

Bài 17: Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G và a, b, c là các cạnh tam giác. Chứng minh rằng : $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

Bài 18: Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

Bài 19: Cho $\triangle ABC$. Giả sử $b + c = 2a$. Chứng minh rằng :

a) $\sin B + \sin C = 2 \sin A$

b) $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

Bài 20: Cho $\triangle ABC$. Giả sử $b \cdot c = a^2$. Chứng minh rằng:

a) $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$

b) $h_a^2 = h_b \cdot h_c$

Bài 21: Cho $ABCD$. Gọi I và J là trung điểm AC và BD . Chứng minh rằng : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$.

Bài 22: Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông biết:

$$ab \cdot \cos C + bc \cdot \cos A + ca \cdot \cos B = c^2.$$

Bài 23: Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm là G . Chứng minh rằng :

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bài 24: Cho $\triangle ABC$ thỏa điều kiện $a = 2b \cdot \cos C$. Chứng minh tam giác ABC cân.

Bài 25: Cho $\triangle ABC$. Chứng minh nếu: $h_a + h_b + h_c = 9R$ thì tam giác ABC đều.

Bài 26: Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 7$, $BC = 8$.

a) Tính diện tích tam giác ABC

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác

c) Tính đường cao kẻ từ đỉnh A .

Bài 27: Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $AC = 4$ và $A = 60^\circ$.

a) Tính chu vi của tam giác

b) Tính $\tan C$

Bài 28: Cho $\triangle ABC$ ta có $a = 13$, $b = 4$ và $\cos C = \frac{-5}{13}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.

Bài 29: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có;

a) $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

b) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$

c) $h_a = 2R \sin B \sin C$

d) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$